ÜBER TAUBER-KONSTANTEN UND EINE FRAGE VON JAKIMOVSKI

VON
HUBERT TIETZ

ABSTRACT

Two general theorems on Tauberian constants are proved. The first one is applied to show relations between the set of limit points of a sequence and the set of limit points of its transform.

1. Einleitung. Mit Hilfe eines Satzes über Tauber-Konstanten für die Limitierungsverfahren $[J, f(x)]$ zeigt Jakimovski ([7] S. 573, Theorem (4.1)), daß für jede Folge $\{s_n\} = \{u_0 + \cdots + u_n\}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ komplexer Zahlen mit $nu_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ die Menge ihrer Häufungspunkte gleich der Menge der Häufungspunkte ihrer Borel-Transformierten ist. Da für das Borel-Verfahren bekanntlich $\sqrt{n}\, u_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ Tauber-Bedingung ist, stellt Jakimovski die Frage: "...if it is true in general, or for which transformations it is true, that if a Tauberian condition stronger than the appropriate Tauberian condition for the transformation is satisfied then the set of limit points of the transform and the set of limit points of the sequence are the same set".

In der vorliegenden Arbeit wird — bei Beschränkung auf Tauber-Bedingungen der Form $\omega_n u_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ — gezeigt, daß die Frage von Jakimovski für eine große Klasse von Verfahren zu bejahen ist. Daneben werden einige allgemeine Sätze über Tauber-Konstanten bewiesen, die mit dieser Frage in Zusammenhang stehen. Verwandte Probleme werden in einer vor kurzem erschienenen Arbeit von Vermes [12] untersucht. Ein Spezialfall unseres Satzes 4.1 ist eine Verschärfung eines Spezialfalls von Vermes' Theorem 3.II(iv). Sonst gibt es keine direkten Berührungspunkte zwischen den nachstehenden Ergebnissen und denen von Vermes.

Herrn Prof. W. Meyer-König danke ich für wertvolle Ratschläge.

2. Bezeichnungen. Der Begriff der Kopplung. Von den Bezeichnungen und Definitionen dieser Nummer werden wir stets ohne besonderen Hinweis Gebrauch machen. Wir betrachten folgende Klasse $\mathscr{M}_0$ von komplexen "Matrizen" mit kontinuierlichem Zeilenindex $x \geqq 0$ (oder $y \geqq 0$) und diskretem Spaltenindex $n = 0, 1, \cdots$: Eine Matrix $A = (a_{xn})$ soll genau dann zu $\mathscr{M}_0$ gehören, wenn

$$(\mathrm{Sp}_0) \qquad \lim_{x \to \infty} a_{xn} = 0 \quad \text{für jedes feste } n = 0,1,\cdots$$

und — unter Voraussetzung der Existenz aller auftretenden Reihen —

$$(\mathrm{Zs}) \qquad \lim_{x \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{xn} = 1$$

ist. Für ein $A \in \mathscr{M}_0$ bezeichnen wir mit $\mathscr{A}^*$ die Menge der komplexen Folgen

$$(2.1) \qquad s = \{s_m\} \text{ mit } s_m = \sum_{n=0}^{m} u_n \qquad (m = 0, 1, \cdots),$$

für welche die A-Transformierten

$$(2.2) \qquad A_x = \sum_{n=0}^{\infty} a_{xn} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{xn} \sum_{v=0}^{n} u_v \qquad (x \geqq 0)$$

existieren, in jedem endlichen Intervall $0 \leqq x \leqq c$ beschränkt sind und

$$(2.3) \qquad A_x = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{v=n}^{\infty} a_{xv} \right\} u_n$$

ist.

Reelle Zahlenfolgen $\omega = \{\omega_n\}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ bezeichnen wir kurz mit $\omega = \{\omega_n\}$, $\{\omega_n\}$ oder auch nur mit ω. So sei $\lambda = \{\lambda_n\}$ stets eine Folge, deren Glieder — von höchstens endlich vielen abgesehen — positiv sind, und es seien $\phi = \{\phi_n\}$, $\psi = \{\psi_n\}$ stets beliebig langsam gegen ∞ strebende reelle Zahlenfolgen. (In den Beweisen setzen wir o.E.d.A. durchweg voraus, daß die Glieder der Folgen λ, ϕ, ψ alle größer als Null sind.) Für feste Folgen λ, ϕ, ψ bezeichnen wir mit $\mathscr{T}_\lambda$, $\mathscr{T}_{\lambda/\phi}$, $\mathscr{T}_{\lambda\psi}$ die Mengen von Folgen (2.1), welche den Bedingungen

$$(T_\lambda) \qquad \lambda_n u_n = O(1),$$

$$(T_{\lambda/\phi}) \qquad \frac{\lambda_n}{\phi_n} u_n = O(1),$$

$$(T_{\lambda\psi}) \qquad \lambda_n \psi_n u_n = O(1)$$

genügen. Dabei bezieht sich $O(1)$ — hier wie in der gesamten Arbeit — auf $n \to \infty$.

Ist ω eine feste Zahlenfolge, bezeichnet $\mathcal{T}_\omega$ die Menge von Folgen (2.1), für die $\omega_n u_n = O(1)$ gilt, und sind $A = (a_{xn})$ und $B = (b_{yn})$ zwei Matrizen, so kann man oft Ungleichungen der Art

$$\limsup_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} |A_x - B_y| \leqq T \limsup_{n\to\infty} |\omega_n u_n| \tag{2.4}$$

aufstellen, falls x und y auf geeignete Weise gegen ∞ streben. Die kleinste Konstante T für die (2.4) — unabhängig von der speziellen Folge (2.1) aus $\mathcal{T}_\omega$ — richtig ist, nennen wir *Tauber-Konstante* (kurz: TK) *für das Matrizenpaar* (A,B) und bezeichnen sie mit T_ω. Die Präzisierung des Satzteiles "...falls x und y auf geeignete Weise gegen ∞ streben", führt zum Begriff der Kopplung zwischen x und y, der für das Folgende allgemein gefaßt werden muß.

Es sei D stets eine Menge reeller Zahlen α mit der Eigenschaft: Zu jeder natürlichen Zahl n_0 gibt es ein $\alpha \in D$ mit $\alpha \geqq n_0$. Wir sprechen von einer *Kopplung zwischen x und y*, wenn x und y auf einer Menge D erklärte, reelle Funktionen von α sind mit $x = x(\alpha) \to \infty$ und $y = y(\alpha) \to \infty$ für $\alpha \to \infty$. Eine Kopplung heißt *x-vollständig* (*y-vollständig*), wenn es zu jeder reellen Folge $\{x_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ($\{y_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$) eine reelle Folge $\{y_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ ($\{x_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$) so gibt, daß für eine geeignete Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\alpha_n \in D$ die Beziehungen $x_n = x(\alpha_n)$ und $y_n = y(\alpha_n)$ gelten, für alle hinreichend großen n. Eine Kopplung heisst *vollständig* schlechthin, wenn sie sowohl x- wie auch y-vollständig ist.

Beispiele: Die Funktionenpaare $x = \alpha$, $y = [\alpha]$ und $x = \alpha$, $y = \alpha$ — beide mit $D = [0, \infty)$ — beschreiben Kopplungen, von denen die erste x-vollständig, die zweite vollständig ist. Häufig werden ganze Klassen von Kopplungen mit Hilfe von Funktionen $g(x, y)$ der beiden Veränderlichen x und y definiert. So ist z.B. — mit $g(x, y) = x/y$ — durch

$$\limsup_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} g(x,y) = q \qquad (q > 0,\ \text{fest}) \tag{2.5}$$

folgende Klasse von Kopplungen definiert: Die Klasse soll jede Kopplung $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$ enthalten, die der Bedingung (2.5) genügt. Das ist z.B. für die vollständige Kopplung $x = \alpha q$, $y = \alpha$ mit $D = (0, \infty)$ der Fall.

Um anzudeuten, daß x und y gekoppelt gegen ∞ streben sollen, schreiben wir bei Ungleichungen wie (2.4) auf der linken Seite statt $x \to \infty$, $y \to \infty$ kurz $\alpha \to \infty$.

3. Tauber-Konstanten und Häufungspunkte der Transformierten. Für zwei feste Matrizen $A = (a_{xn})$ und $B = (b_{yn})$ aus $\mathscr{M}_0$ gilt

SATZ 3.1. *Ist für eine feste λ-Folge $\mathscr{T}_\lambda \subseteq \mathscr{A}^* \cap \mathscr{B}^*$ und ist $T_\lambda < \infty$ bei einer geeigneten Kopplung zwischen x und y, so ist für jede Folge ψ bei ebendieser Kopplung $T_{\lambda\psi} = 0$.*

Beweis. Für jede Folge (2.1) aus $\mathscr{T}_\lambda$ ist wegen (2.2) und (2.3)

$$A_x - B_y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x,y)\lambda_n u_n \tag{3.1}$$

mit

$$c_n(x,y) = \frac{1}{\lambda_n}\left\{\sum_{v=n}^{\infty}(a_{xv} - b_{yv})\right\} \quad \text{für} \quad n = 0,1,\cdots, \tag{3.2}$$

und damit — bei einer geeigneten Kopplung zwischen x und y —

$$\limsup_{\alpha\to\infty}\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x,y)\lambda_n u_n\right| \leqq T_\lambda \limsup_{n\to\infty}\left|\lambda_n u_n\right| \quad \text{mit } T_\lambda < \infty.$$

Insbesondere ist — da A_x und B_y in jedem endlichen Intervall $[0,c]$ beschränkt sind —

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x,y)\lambda_n u_n\right| \leqq M_0 < \infty \qquad \text{für alle } \alpha,$$

wo M_0 eine — nur von der Folge (2.1) abhängige — Konstante ist. Da jede beschränkte Folge in der Form $\{\lambda_n u_n\}$ — mit $s = \{s_m\} = \{\sum_{n=0}^{m} u_n\} \in \mathscr{T}_\lambda$ — geschrieben werden kann, führt die durch $c_n(x,y)$ und $\alpha \to \infty$ definierte Transformation jede beschränkte Folge in eine für $\alpha \in D$ beschränkte Funktion über. Das ist aber genau dann der Fall, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n(x,y)\right| \leqq M < \infty \qquad \text{für alle } \alpha$$

(M eine endliche Konstante) ist. Dies — zusammen mit den Eigenschaften (Sp_0) und (Zs) von A und B — bewirkt, daß die durch $|c_n(x,y)|$ und $\alpha \to \infty$ definierte Transformation permanent für Nullfolgen, insbesondere für jede feste ψ-Folge

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\psi_n}\left|c_n(x,y)\right| = 0$$

ist. Damit ist aber für jede Folge aus $\mathscr{T}_{\lambda\psi}$ bei obiger Kopplung

$$\limsup_{\alpha\to\infty}|A_x - B_y| = \limsup_{\alpha\to\infty}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\psi_n}c_n(x,y)\psi_n\lambda_n u_n\right|$$

$$\leqq \sup_n|\psi_n\lambda_n u_n|\limsup_{\alpha\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\psi_n}|c_n(x\ y)| = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

Bezeichnen wir für eine feste Folge s aus $\mathscr{A}^* \cap \mathscr{B}^*$ mit S_A und S_B die Mengen der Häufungspunkte ihrer A- bzw. B-Transformierten, so läßt sich zeigen

SATZ 3.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 3.1 *ist — bei beliebiger Folge* ψ *— für jede Folge aus* $\mathscr{T}_{\lambda\psi}$: a) $S_A \subseteq S_B$ *bei x-vollständiger,* b) $S_A \supseteq S_B$ *bei y-vollständiger,* c) $S_A = S_B$ *bei vollständiger Kopplung.*

BEWEIS. Nach Satz 3.1 ist für jede ψ-Folge $T_{\lambda\psi} = 0$, d.h., für jede Folge aus $\mathscr{T}_{\lambda\psi}$ gilt

$$\lim_{\alpha\to\infty}|A_x - B_y| = 0. \tag{3.3}$$

Ist $s' \in S_A$, so gibt es eine gegen ∞ strebende reelle Folge $\{x_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty}A_{x_n} = s'$. Zur Folge $\{x_n\}$ gibt es — bei x-vollständiger Kopplung — eine gegen ∞ strebende reelle Folge $\{y_n\}$ so, daß für eine geeignete Folge $\{\alpha_n\}$ von α-Werten $x_n = x(\alpha_n)$ und $y_n = y(\alpha_n)$ ist. Nach (3.3) ist dann

$$\lim_{n\to\infty}|A_{x_n} - B_{y_n}| = 0,$$

d.h. $\lim_{n\to\infty}B_{y_n} = s'$, also $s' \in S_B$, womit Teil a) bewiesen ist. Teil b) beweist man analog, und Teil c) folgt aus a) zusammen mit b).

Ein gewisses Gegenstück zu Satz 3.1 bildet

SATZ 3.3. *Ist für eine feste* λ-*Folge* $T_\lambda > 0$ *bei einer geeigneten Kopplung zwischen x und y, so ist für jede Folge* ϕ *mit* $\mathscr{T}_{\lambda/\phi} \subseteq \mathscr{A}^* \cap \mathscr{B}^*$ *bei ebendieser Kopplung* $T_{\lambda/\phi} = \infty$.

Wäre $T_{\lambda/\phi} < \infty$, so würde $T_\lambda = 0$ aus Satz 3.1 folgen.

In Satz 3.1 — und damit auch in den Sätzen 3.2 und 3.3 — können die Forderungen (Sp_0) und (Zs), welche an die Matrizen A und B gestellt waren, noch etwas abgeschwächt werden. Es hätte genügt, von den beiden festen Matrizen A und B zu verlangen, daß — bei der zur Debatte stehenden Kopplung —

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sum_{v=n}^{\infty}(a_{xv} - b_{yv}) = 0 \text{ für jedes feste } n = 0, 1, \cdots$$

ist.

4. Sonderfälle und Varianten

a) Die Sätze und Beweise von Nr. 3 bleiben bestehen, wenn x oder y, oder x und y, nur ganzzahlige Werte annehmen. Die erforderlichen (trivialen) Änderungen betreffen allein den Begriff der Kopplung. Im ganzzahligen Fall schreiben wir k statt x und m statt y. Weiter spielt es keine Rolle, ob von den Matrizen $A = (a_{kn})$ und $B = (b_{mn})$ eine oder beide zeilenfinit sind.

b) Einen wichtigen Sonderfall erhalten wir, wenn das durch die Matrix $A = (a_{xn})$ definierte Limitierungsverfahren permanent ist — d.h., wenn aus $s_n \to s'$ für $n \to \infty$ stets $A\text{-}\lim s_n = s'$ folgt — und B die Einheitsmatrix ist. In diesem Fall ist $B_m = s_m$ $(m = 0, 1, \cdots)$ und $\mathscr{B}^*$ die Menge aller Folgen. Statt TK für das Matrizenpaar (A, B) sagen wir jetzt *TK für A*. Die hieraus resultierenden Spezialfälle der Sätze von Nr. 3 sollen wegen ihrer Anwendung in Nr. 5 gesondert formuliert werden.

SATZ 4.1. *Ist für eine feste λ-Folge $\mathscr{T}_\lambda \subseteq \mathscr{A}^*$ und ist $T_\lambda < \infty$ bei einer geeigneten Kopplung zwischen x und m, so ist für jede Folge ψ bei ebendieser Kopplung $T_{\lambda\psi} = 0$.*

Bezeichnen wir für eine feste Folge $s \in \mathscr{A}^*$ mit S die Menge ihrer Häufungspunkte, so folgt aus Satz 3.2 der

SATZ 4.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 ist — bei beliebiger Folge ψ — für jede Folge aus $\mathscr{T}_{\lambda\psi}$:* a) *$S_A \subseteq S$ bei x-vollständiger,* b) *$S_A \supseteq S$ bei m-vollständiger,* c) *$S_A = S$ bei vollständiger Kopplung.*

SATZ 4.3. *Ist für eine feste λ-Folge $T_\lambda > 0$ bei einer geeigneten Kopplung zwischen x und m, so ist für jede Folge ϕ mit $\mathscr{T}_{\lambda/\phi} \subseteq \mathscr{A}^*$ bei ebendieser Kopplung $T_{\lambda/\phi} = \infty$.*

c) Wir verlassen die Matrizenklasse $\mathscr{M}_0$ und betrachten folgende Klasse $\mathscr{M}_1$ von Matrizen mit kontinuierlichem Zeilenindex $x \geqq 0$ (oder $y \geqq 0$) und diskretem Spaltenindex $n = 0, 1, \cdots$: Eine Matrix $A = (a_{xn})$ soll genau dann zu $\mathscr{M}_1$ gehören, wenn

$$(Sp_1) \qquad \lim_{x \to \infty} a_{xn} = 1 \text{ für jedes feste } n = 0, 1, \cdots$$

ist. Für ein $A \in \mathscr{M}_1$ bezeichnen wir mit $\mathscr{A}^*$ die Menge der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ mit komplexen Gliedern, für welche die A-Transformierten

$$A_x = \sum_{n=0}^{\infty} a_{xn} u_n \qquad (x \geqq 0)$$

existierten und in jedem endlichen Intervall $0 \leqq x \leqq c$ beschränkt sind. Bei sinngemäßer Uebertragung der Bezeichnungen und Definitionen von Nr. 2, erhalten wir die den Sätzen 3.1 bis 3.3 entsprechenden Sätze. In den Beweisen übernimmt (Sp_1) die Rolle von (Sp_0) und (Zs).

5. Anwendungen.

a) Unter Verwendung von Satz 4.2 läßt sich für das Borel-Verfahren B_0 (vgl. Zeller [13] S. 134) das in der Einleitung erwähnte Resultat von Jakimovski auf einfache Weise aus Ergebnissen von Agnew gewinnen: Für $A = B_0$ ist — mit $\lambda = \{\sqrt{n}\}$ — $\mathscr{T}_\lambda \subseteq \mathscr{B}_0^*$. Ferner ist (T_λ) optimale Tauber-Bedingung für B_0. Nach Agnew [2, Theorems 1.4 und 1.5] gibt es sowohl x- wie m-vollständige Kopplungen mit $T_\lambda = \sqrt{2/\pi} < \infty$. Alsomuß — nach Satz 4.2 mit $\psi = \{\sqrt{n}\}$ — für jede Folge (2.1), die der stärkeren Tauber-Bedingung $nu_n = O(1)$ genügt, $S_{B_0} = S$ sein.

b) Für die Cesàro-Verfahren C_α $(\alpha > 0)$ (vgl. Zeller [13] S. 104) und für die durch

$$A_x = A_x(\beta) = (1+x)^{-\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\beta}{n} \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^n s_n \quad (\beta > -1)$$

definierten verallgemeinerten Abel-Verfahren (vgl. Ishiguro [6] S. 18 bis 22) ist (T_λ) mit $\lambda = \{n\}$ optimale Tauber-Bedingung. In [11] wird — ähnlich wie Jakimovski bei B_0 — gezeigt, daß für diese Verfahren — bei beliebiger Folge ψ mit $\sum_{n=n_0}^{\infty} (n\psi_n)^{-1} = \infty$ — und jede Folge (2.1) aus $\mathscr{T}_{\lambda\psi}$, ebenfalls $S_A = S$ ist. Der entsprechende Satz — mit $\lambda = \{n \log n\}$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} (n\psi_n \log n)^{-1} = \infty$ — wird dort auch für das Logarithmische Verfahren L(vgl. Ishiguro [6] S. 18 bis 22) bewiesen. Diese drei Resultate kann man — wie das von Jakimovski aus Ergebnissen von Agnew — auch aus Ergebnissen von Tenenbaum [10, Theorem 6.17] (in Verbindung mit Agnew [1, Theorem 3.1]), Jakimovski [7, Example (4.3)] und Sitaraman [9, Theorem L] gewinnen.

c) Wir betrachten noch einmal das Borel-Verfahren B_0 und dazu Folgen (2.1), die — bei festem rellem p und $\lambda = \{n^p\}$ — zu $\mathscr{T}_\lambda$ gehören. Man überlegt sich leicht, dass für jedes feste p die Menge $\mathscr{T}_\lambda$ in $\mathscr{B}_0^*$ liegt. Für $p > 1$ enthält $\mathscr{T}_\lambda$ nur konvergente Folgen, also ist — wegen der Permanenz von B_0 — bei jeder Kopplung zwischen x und m stets $T_\lambda = 0$. Da (T_λ) mit $p = 1/2$ optimale Tauber-Bedingung für B_0 ist, folgt $T_\lambda = \infty$ für $p < 1/2$, bei jeder m-vollständigen Kopplung zwischen x und m. Biegert [3, 4] zeigt — der Fall $p = 1/2$ war zuvor schon von

Agnew [2] und Meir [8] untersucht worden — daß für $1/2 \leqq p \leqq 1$ zu jeder Kopplung aus der durch

$$\limsup_{\substack{x \to \infty \\ m \to \infty}} \left| \frac{m - x}{x^k} \right| = Q < \infty \tag{5.1}$$

definierten Klasse — unter der Voraussetzung $k = p$ — Tauber-Konstanten T_λ mit $0 < T_\lambda < \infty$ existieren. (In den Arbeiten von Biegert fehlen — wie Vermes [12, S. 204] bemerkt — bei den (5.1) entsprechenden Formeln die Betragstriche.) Damit erhalten wir — unter Beibehaltung von (5.1) — aus Satz 4.1:

$$T_\lambda = 0 \quad \text{für } 1/2 \leqq k \leqq 1 \text{ und } p > k$$

und aus Satz 4.3:

$$T_\lambda = \infty \quad \text{für } 1/2 \leqq k \leqq 1 \text{ und } p < k.$$

Diese Ergebnisse finden sich bei Biegert [5]. Lediglich der Fall $k < 1/2 \leqq p \leqq 1$ — der ebenfalls von Biegert behandelt wird — läßt sich mit unseren Sätzen nicht erfassen.

Literatur

1. R. P. Agnew, *Equiconvergence of Cesàro and Riesz transforms of series*, Duke Math. J. **22** (1955), 451–460.
2. R. P. Agnew, *Borel transforms of Tauberian series*, Math. Z. **67** (1957), 51–62.
3. W. Biegert, *Über Konstanten Tauberscher Art bei den Kreisverfahren der Limitierungstheorie* Dissert. Stuttgart, 1965.
4. W. Biegert, *Über Tauber-Konstanten beim Borel-Verfahren*, Math. Z. **92** (1966), 331–339.
5. W. Biegert, *Tauber-Konstanten zu verschiedenen Tauber-Bedingungen beim Borel-Verfahren*, Indian J. Math. **9** (1967), 25–36.
6. K. Ishiguro, *On the summability methods of divergent series*, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°, **35**, Nr.1 (1965).
7. A. Jakimovski, *Tauberian constants for the* $[J, f(x)]$ *transformations*, Pacific J. Math. **12** (1962), 567–576.
8. A. Meir, *Tauberian constants for a family of transformations*, Ann. of Math. **78** (1963), 594–599.
9. Y. Sitaraman, *On the Tauberian constant for summability* (L), J. Indian Math. Soc. **29** (1965), 143–154.
10. M. Tenenbaum, *Transforms of Tauberian series by Riesz methods of different orders*, Duke Math. J. **25** (1958), 181–191.
11. H. Tietz, *Tauber-Konstanten für die Verfahren* C_α, A_λ *und* L, *I,II*, Proc. Japan Acad. **45** (1969), 473–477 und 478–483.
12. P. Vermes, *Note on Tauberian constants*, Publ. Math. Debrecen **15** (1968), 203–209.
13. K. Zeller, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1958.

Universität Stuttgart
Mathematisches Institut A